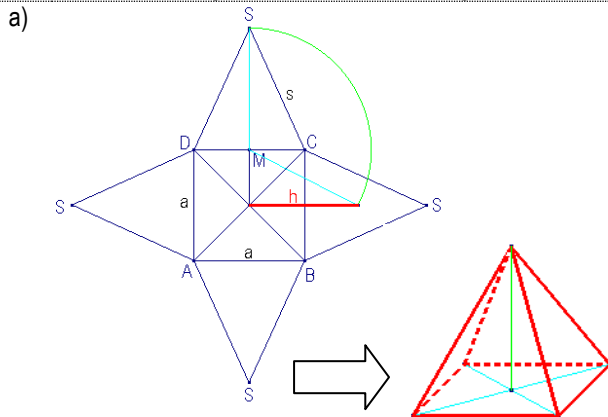


Seiten 4 / 5

Aufgaben „Die gerade Pyramide“

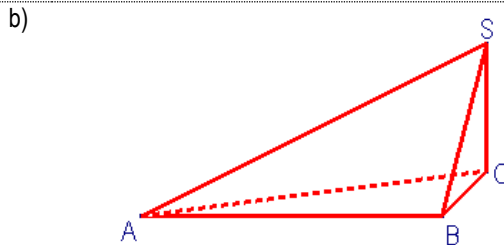
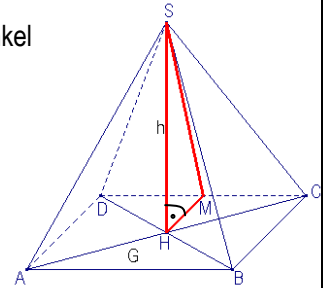
1 Vorbemerkung: Die Konstruktionsaufgaben sind verkleinert gezeichnet.



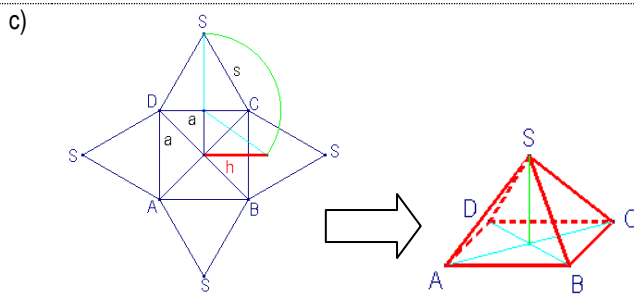
Aus dem Netz wird die Pyramidenhöhe herauskonstruiert. Dies mit dem rechtwinkligen Dreieck HMS, wie im Raumbild angedeutet.

(Hier durch den rechten Winkel bei H und dem „herunterklappen“ der Strecke MS)

Danach können wir mit Hilfe der gegebenen Strecken AB, BC und der herauskonstruierten Höhe h das Raumbild fertig stellen. (Vorsicht, BC ist um die Hälfte verkürzt wegen der Raumbild-Darstellung) (KB unter 1c)

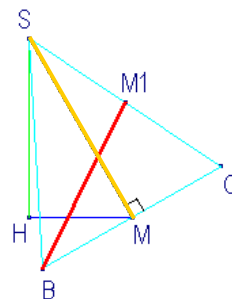
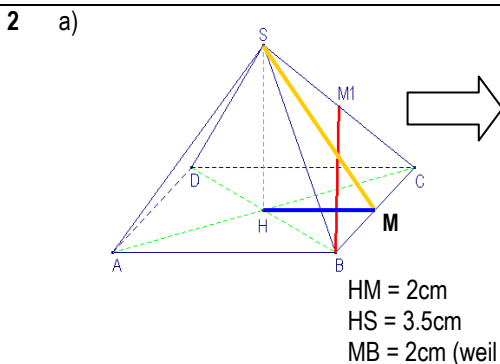


1. AB zeichnen, BC im 45°-Winkel und um die Hälfte verkürzt anhängen (Raumbild!)
2. Aus dem Netz die Strecke SC in den Zirkel nehmen und senkrecht zur Strecke AB bei der Ecke C ansetzen.  $\rightarrow S$ .
3. Vervollständigen.



Die Konstruktion verläuft genau gleich wie bei 1a).

1. Mittelpunkt H der Grundfläche zeichnen (Netz)
2. Mittelpunkt M von CD zeichnen (Netz)
3. Lot auf DC durch H (Netz)
4. MS mit Zirkel von M aus abtragen  $\rightarrow k(M, r = MS) \cap \text{Lot} = S$ , HS = gesuchte Höhe h (Netz)
5. Raumbild mit der Grundfläche ABCD beginnen (Masse aus dem Netz mit Zirkel herausmessen)
6. Mittelpunkt der Grundfläche konstruieren (Diagonalschnittpunkt H)
7. Senkrechte auf AB durch H zeichnen, von H aus mit dem Zirkel die konstruierte Höhe übertragen  $\rightarrow S$
8. Pyramide vervollständigen.

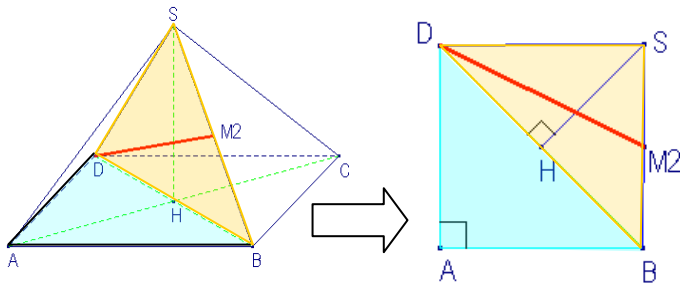


Mit dem eingezeichneten Dreieck HMS konstruieren wir zuerst die Höhe der Seitenfläche. Danach können wir das gleichschenklige Dreieck SBC zeichnen und darin die gesuchte Strecke abtragen. (Die Basis BC ist senkrecht zur Höhe MS!)

Seiten 5 / 6 / 7

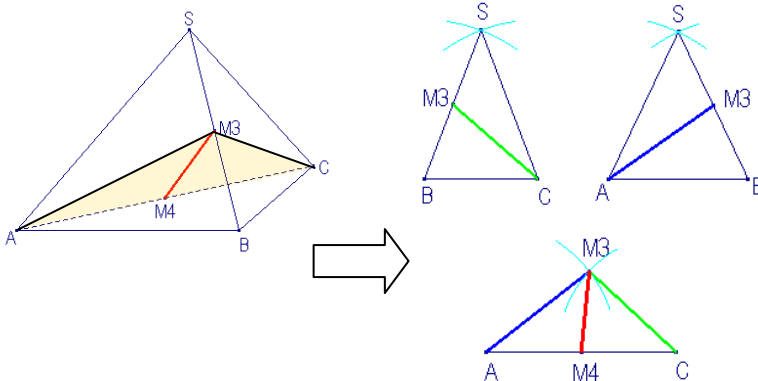
Aufgaben „Die gerade Pyramide“

b)



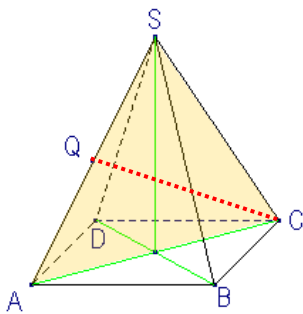
1. Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks ABD.
2. BD halbieren  $\rightarrow$  H
3. Höhe h senkrecht auf BD bei H abtragen  $\rightarrow$  S
4. Dreieck BDS zeichnen
5. SB halbieren  $\rightarrow$  M<sub>2</sub>
6. DM<sub>2</sub> verbinden.

c)



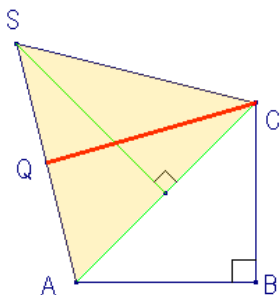
1. Konstruktion der Strecke CM<sub>3</sub> im Dreieck BCS
2. Konstruktion von AM<sub>3</sub> im Dreieck ABS
3. Mit Zirkel die entsprechenden Strecken übertragen und das Dreieck ACM<sub>3</sub> zeichnen.
4. AC halbieren  $\rightarrow$  M<sub>4</sub>
5. M<sub>3</sub>M<sub>4</sub> verbinden.

3. a)  
b)



1.  $G = 11.56\text{cm}^2$  (quadratische Grundfläche).  $\rightarrow$  Also ist die Seitenlänge =  $\sqrt{11.56} = 3.3\text{ cm}$
2. Somnit kann man die Pyramide zeichnen (nach hinten verlaufende Strecken halbieren)
3. Den Punkt Q im Raumbild einzeichnen
4. Die Schnittfläche einzeichnen

c)  
d)



5. Die Strecke AC im Dreieck ABC konstruieren
6. Lot auf AC durch den Mittelpunkt von AC, Höhe  $h = 4\text{cm}$  abtragen  $\rightarrow$  S
7. Dreieck ACS zeichnen
8. AS halbieren  $\rightarrow$  Q
9. QC verbinden.

4

	AB	BC	h	V
a)	3.5 cm	3.2 cm	6cm	<b>22.4 cm<sup>3</sup></b>
b)	34 cm	12 cm	<b>25.5cm</b>	3468 cm <sup>3</sup>
c)	25 dm	<b>21.42 dm</b>	9 dm	1606.5 dm <sup>3</sup>
d)	<b>27.02 m</b>	<b>27.02 m</b>	4.3 m	1046.448 m <sup>3</sup>
e)	3d	4e	9f	<b>36def</b>
f)	<b>24a</b>	24a	6a	1152a <sup>3</sup>

Die verwendeten Formeln entsprechen denjenigen, die im Theorieteil des Dossier angegeben sind. Bitte dort nachschauen.  
Wird das Volumen verwendet, muss es zuerst mal 3 gerechnet werden!

**Seiten 7 / 8**

Aufgaben „Die gerade Pyramide“

5 a)  $V = \frac{G \cdot h}{3}$ , also  $V = \frac{4 \cdot 4 \cdot 5}{3} = \frac{80}{3} = 26.667 \text{ cm}^3$

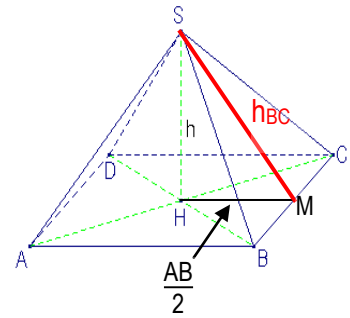
Für die Oberfläche rechnen wir zuerst mit Pythagoras die Höhe  $h_{BC}$  aus (Höhe des Seitendreiecks BCS. in der quadratischen Pyramide ist dies die einzige benötigte Höhe für den Mantel.

Also:  $h_{BC} = \sqrt{HM^2 + HS^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = 5.39 \text{ cm}$

Damit ist die **Seitenfläche BCS** =  $\frac{h_{BC} \cdot BC}{2} = \frac{5.39 \cdot 4}{2} = 10.77 \text{ cm}^2$

Und dies heisst, dass der **Mantel** =  $4 \cdot BCS = 4 \cdot 10.77 \text{ cm}^2 = 43.08 \text{ cm}^2$

Und somit ist die **Oberfläche S** =  $G + S = 4 \cdot 4 + 43.08 = 59.08 \text{ cm}^2$



**V = 26.667 cm<sup>3</sup>**  
**S = 59.08 cm<sup>2</sup>**

6 a) Die Grundfläche einer quadratischen Pyramide ist 46.24 cm<sup>2</sup>. Damit ist die Kantenlänge dieses Quadrates  $a = \sqrt{46.24} = 6.8 \text{ cm}$ .

Die Oberfläche beträgt 122.4 cm<sup>2</sup>, womit der Mantel  $M = 122.4 - 46.24 = 76.16 \text{ cm}^2$  gross ist.

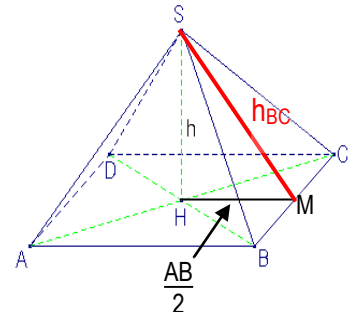
Also ist eine Seitenfläche (ein Seitendreieck) =  $\frac{76.16}{4} = 19.04 \text{ cm}^2$  gross.

Die **Höhe des Seitendreiecks** ist also =  $\frac{\text{Fläche} \cdot 2}{\text{Grundseite}} = \frac{19.04 \cdot 2}{6.8} = 5.6 \text{ cm}$ .

Mit Pythagoras können wir jetzt die Pyramidenhöhe berechnen:

$h = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{5.6^2 - 3.4^2} = 4.45 \text{ cm}$ .

Also ist das Volumen der Pyramide =  $V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{46.24 \cdot 4.45}{3} = 68.59 \text{ cm}^3$

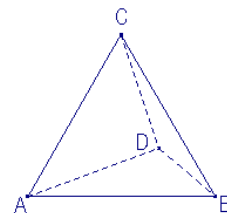


**h = 4.45 cm**  
**V = 68.59 cm<sup>3</sup>**

7 a) Die Grundfläche des Tetraeders ist ein gleichseitiges Dreieck. Gemäss unseren früheren Pythagoras-Überlegungen ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck  $h = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{2}$ . In unserem Fall also =  $\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \sqrt{3} = 8.66 \text{ cm}$

Also ist die **Grundfläche** =  $\frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2} = \frac{10 \cdot 8.66}{2} = 43.3 \text{ cm}^2$

Dies ist gleichzeitig die Fläche jeder Seitenfläche. Die **Oberfläche des Tetraeders** ist also =  $4 \cdot 43.3 = 173.21 \text{ cm}^2$



**S = 173.21 cm<sup>2</sup>**

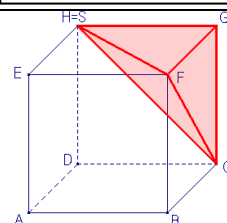
8 a) In dieser Figur brauchen wir zwei Formeln aus dem Pythagoras-Bereich:

1. Diagonale im Quadrat ( $d = 5 \cdot \sqrt{2}$ )
2. Höhe im gleichseitigen Dreieck:  $h = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{2}$

Die Grundseite dieser Pyramide ist das Dreieck GFC. Dies ist zum Berechnen besonders einfach.

$V = \frac{G \cdot h}{3}$ , wobei die Grundseite  $G = \frac{a^2}{2}$ , also  $V = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{6}$

mit Zahlen:  $V = \frac{10^3}{6} = \frac{1000}{6} = 166.667 \text{ cm}^3$



**Seite 8**

Aufgaben „Die gerade Pyramide“

- 8 b) Die Berechnung der Oberfläche ist etwas schwieriger. Dabei setzt sie sich zusammen aus den vier Dreiecksflächen. Die Dreiecke GFC, HGC und FGH sind dabei kongruent und einfach zu berechnen:

$$A_{FGC} = A_{FGH} = A_{CGH} = \frac{a^2}{2}$$

Das Dreieck HFC dagegen ist gleichseitig und zwar mit der Seitenlänge  $s = a\sqrt{2}$ .

$$\text{Somit ist die Höhe dieses Dreiecks HFC} = h = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Und dies führt und zur Fläche des Dreiecks HFC:

$$A_{HFC} = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2}$$

$$A_{HFC} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{12}}{2} = \frac{a^2\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$$

$$\text{Die gesamte Oberfläche ist also } S = 3 \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = a^2 \left( \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\text{Mit Zahlen gerechnet } S = 10^2 \left( \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 100 \left( \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 236.60 \text{ cm}^2$$

- 9 a) Das Volumen einer Pyramide ist ja bekanntlich  $V = \frac{G \cdot h}{3}$

In unserem Fall ist  $G = \text{Seitenfläche des Würfels (Quadratfläche)} a^2$   
Die Höhe ist nicht bekannt.

Bekannt ist aber, dass das Volumen des Körpers um drei Viertel des Würfelvolumens vergrößert wird. Also entsprechen alle sechs aufgesetzten Pyramiden diesen drei Vierteln des Würfelvolumens. Als Gleichung

$$\frac{3}{4} \cdot a^3 = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot h}{3}$$

Aufgelöst ergibt diese Gleichung:

$$\frac{3a^3}{4} = \frac{6a^2 \cdot h}{3} \quad || \cdot 3$$

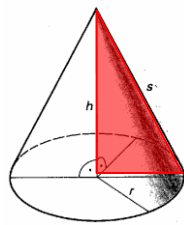
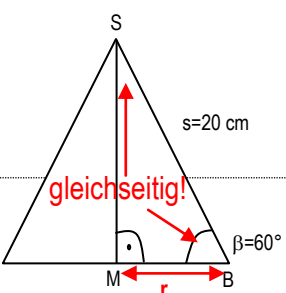
$$\frac{3a^3}{4} = 2a^2 \cdot h \quad || \cdot \text{HN (4)}$$

$$3a^3 = 8a^2 \cdot h \quad || : 8a^2$$

$$\frac{3a}{8} = h \quad \text{Die Pyramiden haben also eine Höhe von } h = \frac{3a}{8}$$

Seite 11

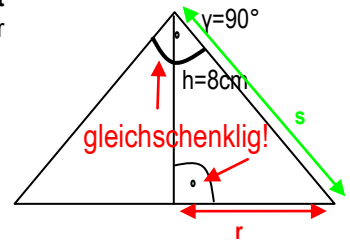
Aufgaben „Der gerade Kreiskegel“

<p>1 a) Mit den Formeln lassen sich alle Aufgaben relativ leicht berechnen:  <math display="block">V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{r^2 \pi \cdot h}{3} = \frac{32^2 \pi \cdot 12}{3} = \frac{1024 \pi \cdot 12}{3} \xrightarrow{(\text{Kürzen})} = 1024 \pi \cdot 4 = 4096 \pi \text{ cm}^3 = 12'867.96 \text{ cm}^3</math></p> <p>b) Wenn der Grundkreisumfang 43 cm misst ist der Radius dieses Grundkreises <math>r = \frac{u}{2 \cdot \pi}</math>  <math display="block">r = \frac{43}{2 \cdot \pi} = 6.84 \text{ cm}</math> und somit ist <math>G = r^2 \pi = 147.14 \text{ cm}^2</math>  <math display="block">V = \frac{G \cdot h}{3}, \text{ also ist } h = \frac{3 \cdot V}{G} = \frac{3 \cdot 565}{147.14} = 11.52 \text{ cm}</math></p> <p>c) <math>V = \frac{G \cdot h}{3}, \text{ also ist } G = \frac{3 \cdot V}{h} = \frac{3 \cdot 348646}{340} = 3076.29 \text{ cm}^2</math>                  Und damit lässt sich r berechnen, denn <math>G = r^2 \pi</math>,                  also ist <math>r = \sqrt{\frac{G}{\pi}} = \sqrt{\frac{3076.29}{\pi}} = 31.29 \text{ cm}</math></p>	<p>Formeln im Theorieteil des Dossier nachschauen!</p>
<p>2 a) <math>M = \pi r s</math>, also müssen wir zuerst noch die Strecke s berechnen. (Dies geht mit Pythagoras im skizzierten Dreieck)  <math display="block">s = \sqrt{15^2 + 21^2} = 25.81 \text{ cm}</math>                  Und somit ist <math>M = \pi r s = \pi \cdot 15 \cdot 25.81 = 1216.13 \text{ cm}^2</math></p> <p>b) Für die Oberfläche brauchen wir zuerst den Radius der Grundfläche. Also auch hier mit Pythagoras im rot markieren Dreieck:  <math display="block">r = \sqrt{51^2 - 41^2} = 30.33 \text{ cm}</math>  <math display="block">S = \pi r^2 + \pi r s = \pi r (r + s), \text{ also } S = \pi \cdot 30.33 \cdot (30.33 + 51) = 7750.016 \text{ cm}^2</math></p> <p>c) <math>\alpha = \frac{360^\circ \cdot r}{s}</math>, dies die Formel für den Netzwinkel. Hier genügt es, die gegebenen Werte einzusetzen, also:  <math display="block">\alpha = \frac{360^\circ \cdot r}{5r} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ</math></p>	 <p>Das „Pythagoras-Dreieck“ ist rot markiert. s ist dabei die Hypotenuse, r und h sind Katheten.</p>
<p>3 <b>Berechnung im Kreiskegel</b>  <math display="block">G = r^2 \pi = (2r)^2 \pi = 4 r^2 \pi</math>  <math display="block">V = \frac{4 r^2 \pi \cdot 5r}{3} = \frac{20 r^3 \pi}{3}</math></p>	<p><b>Berechnung in der Pyramide</b>  <math display="block">G = \text{Länge} \cdot \text{Breite} = 4r \cdot 4r = 16r^2 \text{ (quadratische Pyramide)}</math>  <math display="block">V = \frac{20 r^3 \pi}{3} \text{ (Volumengleich wie der Kegel).}</math>                  Die Höhe ist somit <math>h = \frac{3 \cdot V}{G} = \frac{3 \cdot 20 r^3 \pi}{3 \cdot 16 r^2} = \frac{5 \pi r}{4} = 1.25 \pi r</math>                  oder <math>h = 3.93r</math></p>
<p>4 a) Für den Netzwinkel brauchen wir r und s. <b>Das gegebene Dreieck ist ein gleichseitiges Dreieck (dies ist mit dem Winkel <math>\beta = 60^\circ</math> und der Angabe: gerader Kreiskegel gegeben).</b> Also ist der Radius <math>r = 10 \text{ cm}</math>  <math display="block">\alpha = \frac{360^\circ \cdot r}{s} = \frac{360^\circ \cdot 10}{20} = 180^\circ</math></p> <p>b) Die Oberflächenformel heisst: <math>S = \pi r^2 + \pi r s = \pi r (r + s)</math>. Da wir s und r kennen, können einfach einsetzen.  <math display="block">S = \pi r^2 + \pi r s = \pi r (r + s) = \pi \cdot 10 \cdot (10 + 20) = \pi \cdot 10 \cdot 30 = 300 \pi = 942.48 \text{ cm}^2</math></p>	

Seite 12

Aufgaben „Der gerade Kreiskegel“

- 5 a) Das gegebene Dreieck ist ein rechtwinklig – gleichschenkliges Dreieck (dies ist mit dem Winkel  $\gamma = 90^\circ$  und der Angabe „gerader Kreiskegel“ gegeben). Also ist der Radius  $r = h = 8\text{cm}$ . Und nach Pythagoras ist die Strecke  $s = 8 \cdot \sqrt{2} = (11.314\text{ cm})$



Somit ist die Grundfläche  $G = r^2\pi = 8^2\pi = 64\pi = 201.062\text{ cm}^2$

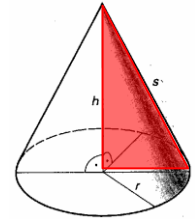
Das Volumen beträgt:  $V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{64\pi \cdot 8}{3} = 536.17\text{ cm}^3$

- b) Die Mantelfläche berechnet sich nach Formel durch  $M = \pi r s = \pi \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} = 64\pi \cdot \sqrt{2}\text{ cm}^2 = 284.345\text{ cm}^2$

- 6 a) Aus den gegebenen Grössen lässt sich die Höhe  $h$  und der Radius  $r$  einfach berechnen:

1.  $h = \frac{3 \cdot V}{G} = \frac{3 \cdot 6971.25}{267.83} = 78.086\text{ cm}$

2.  $r = \sqrt{\frac{G}{\pi}} = \sqrt{\frac{267.83}{\pi}} = 9.233\text{ cm}$



Damit können wir jetzt die Mantellinie mit Pythagoras berechnen, es gilt dabei:

$s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{9.233^2 + 78.086^2} = 78.630\text{ cm}$

- b) Die Mantelfläche berechnet sich nach Formel durch  $M = \pi r s = \pi \cdot 9.233 \cdot 78.630 = 2280.83\text{ cm}^2$

c)  $\alpha = \frac{360^\circ \cdot r}{s} = \frac{360^\circ \cdot 9.233}{78.630} = 42.27^\circ$

- 7 a) Durch Ähnlichkeit kann man den Durchmesser der Deckfläche des Kegelstumpfes berechnen. Die Gesamthöhe zur Höhe des kleinen Stumpfes verhalten sich wie 6:4, also verhalten sich die Durchmesser entsprechend.

Das Volumen des Restkörpers berechnet sich jetzt durch die Differenz des ganzen Kreiskegels minus des kleinen, abgeschnittenen Kreiskegels.

Also  $V_{\text{Restkörper}} = V_{\text{grosser Kegel}} - V_{\text{kleiner Kegel}}$

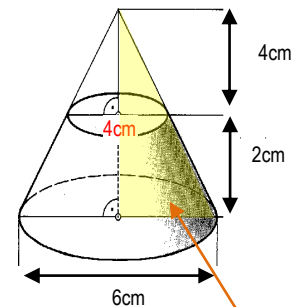
$G_{\text{grosser Kegel}} = r^2\pi = 3^2\pi = 9\pi$

$G_{\text{kleiner Kegel}} = r^2\pi = 2^2\pi = 4\pi$

$V_{\text{grosser Kegel}} = \frac{9\pi \cdot 6}{3} = 18\pi\text{ cm}^3$

$V_{\text{kleiner Kegel}} = \frac{4\pi \cdot 4}{3} = \frac{16\pi}{3}\text{ cm}^3$

$V_{\text{Restkörper}} = V_{\text{grosser Kegel}} - V_{\text{kleiner Kegel}} = 18\pi\text{ cm}^3 - \frac{16\pi}{3}\text{ cm}^3 = \frac{38\pi}{3}\text{ cm}^3 = 39.794\text{ cm}^3$



Dreieck für die Berechnung von s

- b) Der Netzwinkel des grossen Kegels beträgt:  $\alpha = \frac{360^\circ \cdot r}{s} = \frac{360^\circ \cdot 3}{6.71} = 160.95^\circ$  (s mit Pythagoras:  $s = \sqrt{6^2 - 3^2} = 6.71\text{ cm}$ )

Entsprechend zeichnen wir den Mantel des grossen Kegels und dazu denjenigen des kleinen Kegels in die gleiche Figur. Die „Restfigur“ ist die Gesuchte.

